25/10/2018

$(\alpha,\beta) = \{\{\alpha\}, \{\alpha,\beta\}\}$

$(\alpha,\beta) = (\gamma,\delta) \Leftrightarrow \alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$.

Ορισμός: Αν Α,Β είναι δύο σύνολα ονομάζουμε καρτεσιανό γινόμενο των Α,Β (συμβ. $A\times B$) είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών με πρώτα μέλη από το σύνολο Α και δεύτερα μέλη από το σύνολο Β.

$A\times B = \{(\alpha,\beta) : \alpha\in A, \beta\in B\}$

$(\underset{\substack{\text{πρώτο}\\\text{μέλος}}}{\alpha}, \underset{\substack{\text{δεύτερο}\\\text{μέλος}}}{\beta})$

Παράδειγμα

$A=\{1,2\}$

$B=\{1,3,4\}$

$A\times B = \{(1,1),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4)\}$

Παρατήρηση

Για κάθε σύνολο Α

$A\times\emptyset = \emptyset$

$\emptyset\times A = \emptyset$

Συμβολίζουμε με Δ_A το σύνολο $\Delta_A=\{(x,x)\ x\in A\}$

Το σύνολο Δ_A λέγεται διαγώνιος του συνόλου Α.

$A = \{1,2,3\}$

$A \times A$

	1	2	3
1	1,1	2,1	3,1
2	2,1	2,2	3,2
3	3,1	2,3	3,3

Σημείωση:

Γενικά δεν είναι σωστό ότι $A \times B = B \times A$

πχ $A = \{1\}$

$B = \{2,3\}$

$A \times B = \{(1,2)\ (1,3)\}$

$B \times A = \{(2,1)\ (3,1)\}$

$A \times B \neq B \times A$.

Ασκήσεις

1. Για σύνολα A, B, Γ Νδο.:

α) $A \times (B \cup \Gamma) = (A \times B) \cup (A \times \Gamma)$

ΛΥΣΗ

Για τυχαία x, y: $(x,y) \in A \times (B \cup \Gamma) \Rightarrow x \in A \wedge y \in B \cup \Gamma$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in \Gamma)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in \Gamma)$

$\Leftrightarrow (x,y) \in A \times B \vee (x,y) \in A \times \Gamma$

$\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times \Gamma)$

Επομένως $A \times (B \cup \Gamma) = (A \times B) \cup (A \times \Gamma)$

β) $(B\cup\Gamma)\times A=(B\times A)\cup(\Gamma\times A)$

ΛΥΣΗ:

Ομοίως με την (α).

γ) $A\times(B\cap\Gamma)=(A\times B)\cap(A\times\Gamma)$

ΛΥΣΗ

Για τυχαία x,y

$(x,y)\in(A\times B)\cap(A\times\Gamma)$

$\Leftrightarrow (x,y)\in A\times B \wedge (x,y)\in A\times\Gamma$

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in B)\wedge(x\in A\wedge y\in\Gamma)$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B \wedge y\in\Gamma$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B\cap\Gamma$

$\Leftrightarrow (x,y)\in A\times(B\cap\Gamma)$

Επομένως $A\times(B\cap\Gamma)=(A\times B)\cap(A\times\Gamma)$

δ) $(B\cap\Gamma)\times A=(B\times A)\cap(\Gamma\times A)$

ΛΥΣΗ

Ομοίως με την (γ)

ε) $A\times(B\setminus\Gamma)=(A\times B)\setminus(A\times\Gamma)$

ΛΥΣΗ

Έστω τυχαία x,y

$(x,y)\in(A\times B)\setminus(A\times\Gamma)$

$\Leftrightarrow (x,y)\in(A\times B)\wedge(x,y)\notin A\times\Gamma$

$\Leftrightarrow ((x\in A)\wedge(y\in B))\wedge(\sim(x\in A\wedge y\in\Gamma))$

$\Leftrightarrow ((x\in A)\wedge(y\in B))\wedge((\sim(x\in A))\vee(\sim(y\in\Gamma)))$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\notin A\vee y\notin\Gamma)$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x\in A \wedge y\in B \wedge x\notin A)}_{\text{ψευδής}} \vee (x\in A \wedge y\in B \wedge y\notin \Gamma)$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B \wedge y\notin \Gamma$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in (B-\Gamma)$

$\Leftrightarrow (x,y) \in A\times(B-\Gamma)$

Επομένως $A\times(B-\Gamma) = (A\times B) - (A\times\Gamma)$

στ) $(B-\Gamma)\times A = (B\times A) - (\Gamma\times A)$

ΛΥΣΗ

Ομοίως με την (ε)

ζ) $A\times B = B\times A \Leftrightarrow A=\emptyset$ ή $B=\emptyset$ ή $A=B$.

ΛΥΣΗ

$\Leftarrow$) Αν $A=\emptyset$ ή $B=\emptyset$ ή $A=B$ τότε προφανώς $A\times B = B\times A$

$\Rightarrow$) Έστω ότι $A\times B = B\times A$

Υποθέτουμε ότι $\underbrace{A\neq\emptyset}_{\substack{\text{υπάρχει}\\ \alpha\in A}}$ και $\underbrace{B\neq\emptyset}_{\substack{\text{υπάρχει}\\ \beta\in B}}$ και θα δ.ο. $A=B$.

Δείχνουμε πρώτα ότι $A\subseteq B$

Έστω τυχαίο $x\in A$

Εφόσον $\beta\in B$ έχουμε $(x,\beta)\in A\times B$.

Αφού $A\times B = B\times A$ (από υπόθεση) έχουμε $(x,\beta)\in B\times A$ άρα $x\in B$ (και $\beta\in A$)

Συνεπώς $A\subseteq B$.

Δείχνουμε ότι $B \subseteq A$

Έστω τυχαίο $y \in B$

Τότε $(y, \alpha) \in B \times A$ και αφού $B \times A = A \times B$ (από υπόθεση)

επομένως $(y, \alpha) \in A \times B$ άρα $y \in A$ (και $\alpha \in B$)

Συνεπώς $B \subseteq A$

Επομένως $A = B$.